

## Sur la fracture des adhésifs caoutchoutiques

Pierre-Gilles de GENNES et Sandra M. TROIAN

**Résumé** – Le « modèle I » de jonction faible ([1], [2]) décrit la rupture d'un adhésif caoutchoutique en postulant que : (a) Lorsque la contrainte  $\sigma$  est en dessous du seuil  $\sigma_c$ , la vitesse d'ouverture  $\dot{h}$  est nulle. (b) Pour  $\sigma > \sigma_c$ ,  $\dot{h} = Q^{-1} \sigma$ , et donc  $\dot{h}$  est discontinu pour  $\sigma = \sigma_c$ . Le modèle I est le modèle naturel pour les cas où on a rupture chimique de certains pontages à  $\sigma = \sigma_c$ . Suivant une suggestion de A. Seeger, on construit ici la solution explicite du modèle I pour une fracture avançant à une vitesse  $V$ . La distribution de contraintes s'avère singulière au point de séparation (comme prévu dans la référence [3]) mais est aussi singulière au point d'initiation : ceci est incompatible avec les conditions aux limites, et montre qu'il faut remplacer le « modèle I » par un « modèle III » dans lequel  $\dot{h}(\sigma)$  est continu, mais à variation rapide autour de  $\sigma_c$ .

### Fracture of rubbery adhesives

**Abstract** – Certain weak adhesive junctions ([1], [2]) may be described by a ("model I") where: (a) The rate of opening  $\dot{h}$  vanishes when the stress  $\sigma$  is below a certain threshold stress  $\sigma_c$ . (b) For  $\sigma > \sigma_c$ ,  $\dot{h} = Q^{-1} \sigma$ , and thus  $\dot{h}$  jumps discontinuously at  $\sigma = \sigma_c$ . This model is close to reality in cases where certain chemical bridges in the junction must be broken at  $\sigma = \sigma_c$ . Following unpublished calculations of A. Seeger, we construct here the explicit solution of model I, for a fracture moving at a prescribed velocity  $V$ . The stress distribution is singular at the fracture tip (as predicted in reference [3]) but it is also singular at the initiation point: this is incompatible with the boundary conditions; thus model I should be replaced by a "model III" where  $\dot{h}(\sigma)$  is continuous, but rises steeply near  $\sigma = \sigma_c$ .

I. COMPORTEMENT MÉCANIQUE. – Dans la fracture d'un polymère (vitreux, non réticulé) la région de fluage est souvent limitée à une « jonction » mince ([1], [3]) (fig. 1). La description la plus simplifiée d'une telle jonction postule une relation linéaire entre la contrainte appliquée  $\sigma$  et la vitesse d'ouverture  $\dot{h} \equiv dh/dt$ .

Deux modèles ont été considérés jusqu'à présent (fig. 2).

Modèle I

$$(1) \quad \dot{h} = \begin{cases} 0 & (\sigma < \sigma_c) \\ Q^{-1} \sigma & (\sigma > \sigma_c) \end{cases}$$

Modèle II

$$(2) \quad \dot{h} = \begin{cases} 0 & (\sigma < \sigma_c) \\ Q^{-1} (\sigma - \sigma_c) & (\sigma > \sigma_c) \end{cases}$$

où  $Q$  est le facteur de friction de la jonction. Le modèle II engendre une fonction  $\dot{h}(\sigma)$  continue. La solution exacte a été construite récemment [4]. Elle donne une énergie de fracture  $G(V)$  fonction de la vitesse  $V$  qui est en accord avec les prédictions qualitatives des références [1] et [3]. Mais certaines jonctions relèvent plutôt du modèle I : par exemple des jonctions caoutchouc/caoutchouc par l'intermédiaire de pontages chimiques, ou des jonctions verre/caoutchouc utilisant des chaînes greffées au verre, et pontées au caoutchouc.

Dans ces deux exemples  $\sigma_c$  est un seuil de rupture chimique. Pour  $\sigma > \sigma_c$  il n'y a pas de raison d'avoir un terme constant dans la relation  $\dot{h}(\sigma)$ . Donc le modèle I est peut-être plus proche de la réalité que le modèle II. Dans la présente Note, nous analysons la distribution de contraintes  $\sigma(x)$  et de déplacements  $u(x)$  pour la fracture de la figure 1 se déplaçant à une vitesse prescrite  $V$ .

Note présentée par Pierre-Gilles de GENNES.

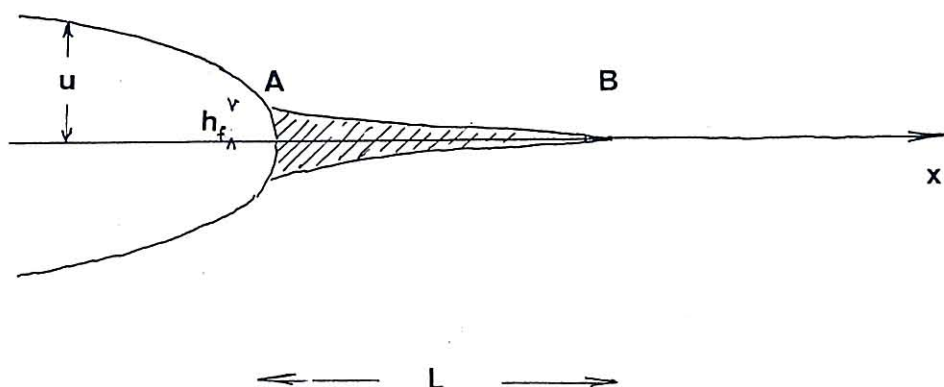


Fig. 1. — Fracture d'une jonction faible : le seuil de plasticité est dépassé sur l'intervalle AB.

Fig. 1. — Fracture of a weak junction: the stress is beyond the plastic yield threshold in the region AB.

II. SOLUTION EXPLICITE. — Notre approche, comme dans les références [2] et [3] décrit les champs élastiques par une superposition  $\varphi(y)$  de fractures élémentaires

$$(5) \quad \sigma(x) = \mu \int_0^x \varphi(y) |x-y|^{-1/2} dy$$

$$(6) \quad -\frac{du}{dx} \equiv \delta(x) = (1-\nu) \int_x^L \varphi(y) |y-x|^{-1/2} dy$$

où  $\mu$  est un coefficient de Lamé,  $\nu$  le rapport de Poisson  $\cong 1/2$ .  $\delta(x)$  est la « densité de dislocations » dans la jonction, qui s'étend de  $x=0$  à  $x=L$ .

L'équation constitutive (1) devient alors

$$(7) \quad \int_0^x \varphi(y) |x-y|^{-1/2} dy = \lambda \int_x^L \varphi(y) |y-x|^{-1/2} dy$$

où  $\lambda$  est une valeur propre proportionnelle à la vitesse

$$(8) \quad \lambda = (1-\nu) \frac{QV}{\mu} = \frac{V}{V^*}$$

La normalisation de  $\varphi$  est imposée par la valeur de l'ouverture finale de la jonction  $h_f = h(x=0)$  qui se déduit d'un modèle moléculaire détaillé [1]

$$(9) \quad h_f = \int_0^L \delta(y) dy.$$

La longueur  $L$  de la jonction doit être fixée par une condition qui impose la contrainte seuil :

$$(10) \quad \begin{cases} \sigma > \sigma_c & \text{pour } 0 < x < L \\ \sigma < \sigma_c & \text{pour } x > L. \end{cases}$$

La forme la plus simple des sources  $\varphi(y)$  qui permette d'éventuelles singularités aux deux bouts ( $y=0$  et  $y=L$ ) est

$$(11) \quad \varphi(y) = C y^{-(\epsilon+1/2)} (L-y)^{-p}$$

où  $C$  est une constante de normalisation, qui a les dimensions d'une longueur. L'exposant  $p$  n'est pas encore déterminé à ce stade. L'exposant  $\epsilon$  a été introduit dans la

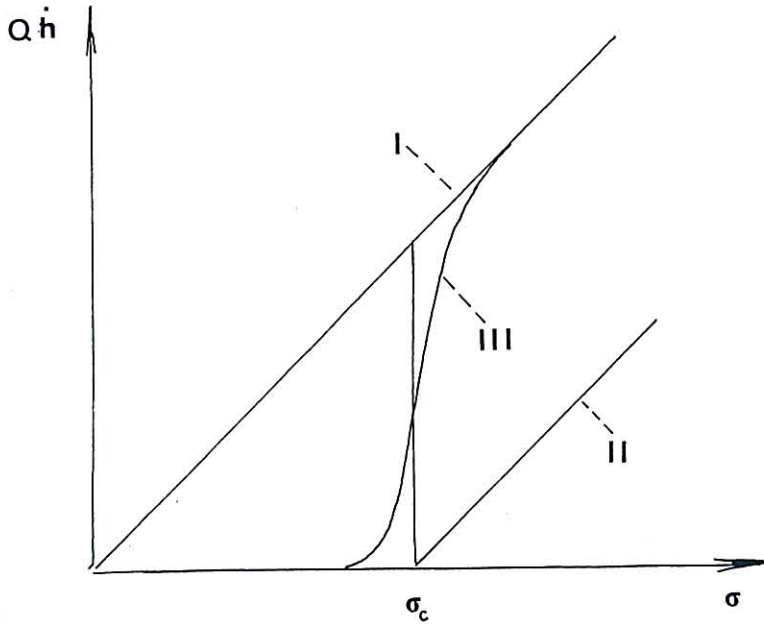


Fig. 2. — Relation entre vitesse d'ouverture ( $\dot{h}$ ) et contrainte ( $\sigma$ ). Le modèle I est linéaire ( $\sigma = Q\dot{h}$ ) pour  $\sigma > \sigma_c$ . Le modèle II est du type « frottement solide ». Le modèle III éviterait les singularités non physiques du modèle I.

Fig. 2. — Constitutive relations between rate of opening ( $\dot{h}$ ) and stress ( $\sigma$ ). Model I assumes a proportionality ( $\sigma = Q\dot{h}$ ) when  $\sigma$  is above the yield stress  $\sigma_c$ . Model II adds a constant term ( $\sigma - \sigma_c = Q\dot{h}$ ). Model III would suppress the non physical singularities associated with model I.

référence [4] ( $0 < \varepsilon < 1/2$ ). A. Seeger (communication privée) a démontré élégamment que le champ élastique a bien des solutions de ce type [en raisonnant directement sur  $\sigma(x)$  et non pas sur les sources].

Les contraintes  $\sigma(x)$  et les densités de dislocation  $\delta(x)$  qui résultent des équations (5), (6) et (11) sont en général des fonctions hypergéométriques. Mais, pour un choix particulier de  $p$  :

$$(12) \quad p = 1 - \varepsilon$$

celles-ci se simplifient et l'on a

$$(13) \quad \mu^{-1} \sigma(x) = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(1/2 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - \varepsilon)} C x^{-\varepsilon} (L - x)^{\varepsilon - 1/2} L^{-1/2}.$$

La densité  $\delta(x)$  a la même forme fonctionnelle, donc on a bien une solution self consistante de (11)  $\mu^{-1} \sigma(x) = \lambda \delta(x)$  avec

$$(14) \quad \lambda = \text{tg}(\pi\varepsilon).$$

La relation (14) donne  $\varepsilon \approx \pi^{-1} \lambda$  aux vitesses faibles ( $\lambda \rightarrow 0$ ) et  $\varepsilon \rightarrow 1/2$  aux vitesses fortes ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) comme annoncé dans la référence [4].

La condition de normalisation (9) donne

$$(15) \quad C = \frac{\sin(\pi\varepsilon)}{2\pi} h_f.$$

III. DISCUSSION. — Nous allons voir que la singularité au point d'initiation (B) introduit des effets physiques inacceptables. En effet la contrainte  $\sigma(x)$  est très grande *au-delà de B*. Pour  $x=L+u$  (avec  $u$  positif petit).

$$(16) \quad \sigma(x) \approx (\text{Cte}) C \mu L^{-(1/2+\epsilon)} u^{-1/2+\epsilon}.$$

Donc la condition  $\sigma < \sigma_c$  pour  $x > L$  ne peut être satisfaite. Si on ignore cette difficulté, et que l'on impose  $\sigma = \sigma_c$  au point de l'intervalle  $(0, L)$  où  $\sigma(x)$  est *minimum*, on trouve d'ailleurs un comportement assez pathologique : pour une vitesse  $V \rightarrow 0$ , la longueur  $L$  tend vers 0 :  $L \sim V \tau$  où  $\tau$  est le temps de suction de la référence [1]. En réalité, on doit avoir  $L \rightarrow L_0 = h_f \mu / \sigma_c$  dans un modèle réaliste.

Il est donc nécessaire, pour décrire convenablement la fracture d'un adhésif caoutchoutique, de choisir un modèle dans lequel  $\dot{h}(\sigma)$  est continue : par exemple, d'aller au modèle III de la figure 2.

Nous sommes très reconnaissants au professeur A. Seeger de nous avoir communiqué son analyse du champ de contraintes.

L'un de nous (P.-G. G.), a par ailleurs bénéficié de discussions très utiles avec C. Hui, D. Xu et D. Maugis sur l'ensemble de ces modèles élastiques.

Note remise le 4 avril 1990, acceptée après révision le 31 mai 1990.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P.-G. DE GENNES, *Journal de Physique*, 50, 1989, p. 2551-2562.
- [2] P.-G. DE GENNES, *Canadian Journal of Physics* (à paraître).
- [3] P.-G. DE GENNES, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309, série II, 1989, p. 1125-1128.
- [4] C. Y. HUI, D. B. XU, L. O. FAGER et J. L. BASSANI (à paraître).

Collège de France,  
Physique : Matière condensée, 75231 Paris Cedex 05.